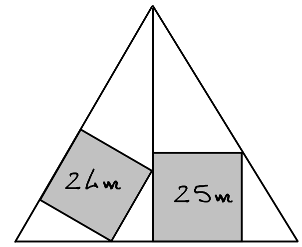
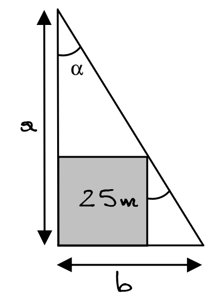
Problème : Le nouveau pavillon que j'ai conçu est constitué de 2 triangles de couleur bleue identiques sur lesquels je vais coudre 2 carrés de couleur jaune dont les côtés sont respectivement de 24cm et 25cm tel que représenté sur le schéma.
Trouver la surface de chacun des triangles ?



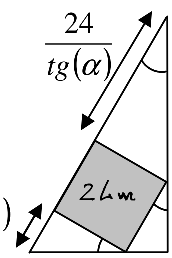
Considérons le triangle de droite, nous pouvons écrire les relations:

$$tg(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{25}{(a-25)} = \frac{(b-25)}{25} \qquad (1)$$



Des expressions (1) on en déduit que: $ab = 25(a+b)$ (2)

Considérant le triangle de gauche, son hypoténuse est constituée de 3 segments. Les 3 triangles rectangles intérieurs sont semblables et ont tous un côté mesurant 24m, nous en déduisons les longueurs des segments constituant cette hypoténuse telle qu'indiquée sur le schéma.



Les 2 triangles initiaux étant identiques, leurs hypoténuses ont même longueur, nous en déduisons l'égalité :

$$\sqrt{(a^2+b^2)} = 24 + \frac{24}{tg(\alpha)} + 24 \times tg(\alpha) = 24 \times \left(1 + \frac{a^2+b^2}{ab}\right) \quad (3)$$

Or en tenant compte de (2) on obtient les égalités :

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a+b)^2 - 50(a+b) \text{ et } \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a+b}{25} - 2$$

L' équation (3) conduit donc à résoudre :

$$(a+b)^2 - 50(a+b) = 24^2\left(\frac{a+b}{25} - 1\right)^2 \quad (4)$$

Posons $s = a+b$ Compte tenu de (2) la surface recherchée sera alors égale à $\frac{25s}{2}$. L'équation (4) conduit à résoudre l'équation du second degré :

$$s^2 - 50s - \frac{24^2 25^2}{7^2} = 0$$ qui admet comme solution : $s = 25 + 25\sqrt{1 + \frac{24^2}{7^2}}$

La surface recherchée est donc d'après (2) : $\frac{ab}{2} = \frac{25^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{24^2}{7^2}}\right)$