Résolution de l'équation réduite de degré 3

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1) \text{ avec } p, q \in R^2, x \in C$$

Toute équation générale de degré 3 : $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ peut être écrite sous forme réduite par changement de variable: $(x+\frac{a}{3})^3 + (b-\frac{a^2}{3})(x+\frac{a}{3}) + (c - \frac{ab}{3} + 2\frac{a^3}{27}) = 0$

Considérons le déterminent :

$$\begin{vmatrix} x & u & v \\ v & x & u \\ u & v & x \end{vmatrix} = x^3 - 3uvx + u^3 + v^3 = (x-u-v)[x^2 + (u+v)x + u^2 + v^2 - uv]$$

Qui admet les 3 racines : $\begin{array}{l} x1 = -(u+v) \\ x2 = -\left(\frac{u+v}{2}\right) - i\sqrt{3}\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ x3 = -\left(\frac{u+v}{2}\right) + i\sqrt{3}\left(\frac{u-v}{2}\right) \end{array}$ (2)

Pour p et q donnés, recherchons u et v tels que : $p = -3uv$ et $q = u^3 + v^3$ les racines de (1) sont alors obtenues par (2)

Connaissant la somme et le produit de u^3, v^3 ces valeurs sont donc racines de $x^2 - qx - \frac{p^3}{27} = 0$ posons $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

Si $\Delta \geq 0$ alors $u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$ et $v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$ et (2) donne les 3 solutions recherchées (1 racine réelle et 2 racines complexes)

Si $\Delta < 0$ alors $u^3 = \frac{q}{2} + i\sqrt{-\Delta}$ et $v^3 = \frac{q}{2} - i\sqrt{-\Delta}$ soit $u^3 = \rho e^{i\theta}$ et $v^3 = \rho e^{-i\theta}$

avec $\cos(\theta) = \frac{q/2}{\sqrt{-p^3/27}}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{-p^3/27}}$ et $\rho = \sqrt{-p^3/27}$

on obtient donc 3 racines réélles :

$$\begin{array}{l} x1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \\ x2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right) \\ x3 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right) \end{array}$$