Résolution de l'équation réduite de degré 4

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \quad (1) \quad \text{avec} \quad p,q,r \in R^3, x \in C$$

Toute équation générale de degré 4 : $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ peut être écrite sous forme réduite: $(x+\frac{a}{4})^4 + p(x+\frac{a}{4})^2 + q(x+\frac{a}{4}) + r = 0$

Considérons le déterminent :

$$\begin{vmatrix} x & u & v & w \\ u & x & w & v \\ v & w & x & u \\ w & v & u & x \end{vmatrix} = x^4 - 2(u^2+v^2+w^2)x^2 + 8uvwx + (u^2+v^2+w^2)^2 - 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)$$

Qui se factorise : $(x+u+v+w)(x+u-v-w)(x-u-v+w)(x-u+v-w)$

Pour p, q et r donnés, recherchons u, v et w tels que :

$p = -2(u^2+v^2+w^2)$, $q = 8uvw$ et $r = (u^2+v^2+w^2)^2 - 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)$

Ce qui conduit à : $\begin{cases} u^2+v^2+w^2 = -\dfrac{p}{2} \\ u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p^2}{4} - r\right) \\ uvw = \dfrac{q}{8} \end{cases}$

les valeurs u^2, v^2, w^2 sont racines de l'équation : $(x-u^2)(x-v^2)(x-w^2) = 0$

qui peut encore s'écrire : $x^3 - (u^2+v^2+w^2)x^2 + (u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)x - u^2v^2w^2 = 0$

Le problème est donc ramené à résoudre une équation de degré 3.

$x^3 + \dfrac{p}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p^2}{4} - r\right)x - \dfrac{q^2}{64} = 0$ qui admet 3 racines dans le corps des complexes

Déterminant les racines u^2, v^2, w^2 puis les valeurs u, v, w on en déduit les racines de l'équation (1) comme étant :

$$\begin{aligned} x1 &= -u-v-w \\ x2 &= -u+v+w \\ x3 &= u-v+w \\ x4 &= u+v-w \end{aligned}$$