Résolution de l'équation réduite de degré 4

$x^4 + px^2 + qx + r = 0$ (1) avec $p, q, r \in R^3, x \in C$

Toute équation générale de degré 4 : $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ peut être écrite sous forme réduite: $(x + \frac{a}{4})^4 + p(x + \frac{a}{4})^2 + q(x + \frac{a}{4}) + r = 0$

Nous tentons de transformer l'équation (1) sous la forme $\left(x^2 + \alpha x + \beta\right)\left(x^2 - \alpha x + \gamma\right) = 0$

Qui donne : $x^4 + \left(\gamma + \beta - \alpha^2\right)x^2 + \alpha(\gamma - \beta)x + \beta\gamma = 0$

Cette factorisation est possible si l'on trouve α, β, γ tels que :

$$\begin{cases} \gamma + \beta = p + \alpha^2 \\ \gamma - \beta = \dfrac{q}{\alpha} \\ \beta\gamma = r \end{cases} \quad \text{ce qui conduit à} \quad \begin{cases} 2\gamma = \alpha^2 + p + \dfrac{q}{\alpha} \\ 2\beta = \alpha^2 + p - \dfrac{q}{\alpha} \\ 4\beta\gamma = 4r = \left(\alpha^2 + p\right)^2 - \dfrac{q^2}{\alpha^2} \end{cases}$$

La dernière égalité conduit à une équation du troisième degré dont α^2 est solution.
$\alpha^6 + 2p\alpha^4 + \left(p^2 - 4r\right)\alpha^2 - q^2 = 0$ (2)

Equation qui admet toujours une solution réelle que l'on peut résoudre (cf. méthode de résolution des équations de troisième degré par ailleurs).

Connaissant alors α^2 on en déduit β et γ

L'équation (1) du quatrième degré revient donc à résoudre les 2 équations du second degré :

$$\begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta = 0 \\ x^2 - \alpha x + \gamma = 0 \end{cases}$$

Il est inutile de vouloir poursuivre cette méthode pour résoudre des équations algébriques de degrés supérieurs. En effet le mathématicien Norvégien Abel démontra vers 1826 l'impossibilité de résoudre des équations de degré 5 par radicaux. Son contemporain Evariste Galois, mathématicien Français, l'a démontré quant à lui pour toute équation de degré supérieur.