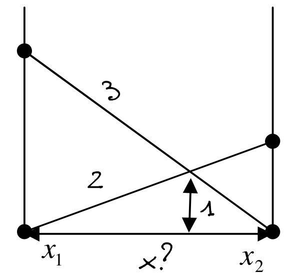
# Problème de rangement dans un coffre

Trouver la largeur x du coffre permettant de ranger 2 objets, l'un de longueur 2m et l'autre de 3m se croisant à une hauteur de 1m du sol




La largeur du coffre x est somme de 2 segments $x = x_1 + x_2$
En appliquant le théorème de Thales on peut écrire :
$\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{x_2}{x}$ ainsi que $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{x_1}{x}$

Soit à résoudre l'équation suivante :
$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = 1 \quad (1) \quad \text{Avec } 0 < x < 2$$
Posons : $s^2 = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ On démontre les différentes égalités :
$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1-s^2}{2} \ (2) \qquad \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1+s^2}{2} \ (3)$$
En éliminant x des égalités (2) et (3) on montre que s est solution de :
$\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{s}{1-s^4}$ Qui revient à résoudre l'équation de degré 4 : $s^4 + \frac{4}{\sqrt{5}}s - 1 = 0$ (4)
Equation qui peut être factorisée en : $(s^2 - \alpha s + \beta)(s^2 + \alpha s + \chi) = 0$ (5)

Avec : $\begin{cases} \beta + \chi = \alpha^2 \\ \beta - \chi = \frac{4}{\sqrt{5}\alpha} \\ \beta\chi = -1 \end{cases}$ (6) ce système conduit à résoudre : $\alpha^6 + 4\alpha^2 - \frac{16}{5} = 0$ (7)

L'équation (7) admet comme solution : $\boxed{\alpha^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{13}+3\sqrt{3}}{5}} - \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{13}-3\sqrt{3}}{5}}\right)}$

Connaissant $\alpha$ on déduit du système (6) les valeurs :
$\beta = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}\alpha}$ et $\chi = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}\alpha}$

L'équation (5) donne alors comme solution : $s = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{\sqrt{5}\alpha} - \alpha^2}$

Qui peut encore s'écrire : $\boxed{s = \sqrt{\sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + 1} - \frac{\alpha^2}{4}} - \frac{\alpha}{2}}$

Des égalités (2) et (3) on en déduit : $\boxed{x^2 = 9 - \frac{4}{(1-s^2)^2} = 4 - \frac{4}{(1+s^2)^2}}$

Solution numérique :
$$\alpha^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{13}+3\sqrt{3}}{5}} - \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{13}-3\sqrt{3}}{5}}\right) = 0{,}710378914$$
$$s = \sqrt{\sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + 1} - \frac{\alpha^2}{4}} - \frac{\alpha}{2} = 0{,}518586444 \quad x^2 = 9 - \frac{4}{(1-s^2)^2} = 4 - \frac{4}{(1+s^2)^2} = 1{,}515818287$$
d'où $\boxed{x = 1{,}231185724\,\mathrm{m}}$